MAI 1 – 2. cvičení

1. Ještě opakování jednoduchých funkcí – vlastnosti, grafy (bez užití diferenciálního počtu), rovnice a nerovnice – příklady ze cvičení 1 a navíc:

   a) Ukažte, že platí: f lichá funkce a $0 \in D_f \Rightarrow f(0)=0$.

   b) Je-li f rostoucí (resp. klesající) funkce na intervalu (a,b), pak k f existuje na (a,b) funkce inverzní.

   c) Promyslete (a pokuste se výsledek formulovat co nejpřesněji), zda lze z monotonie dvou (nebo více) funkcí odvodit monotonii funkce z nich složené (pokud je taková složená funkce definovaná).

2. Inverzní funkce – příklady ze cvičení 1 (II/5)

3. Množiny – příklady ze cvičení 1 (I/4) a třeba ještě:

   a) $(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D) \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$;

   b) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

4. Zobrazení

$$f : A \to B, \quad M, M_i \subseteq A, \; N, N_i \subseteq B \quad (i=1,2)$$

$$f(M) = \{ b \in B;\ \exists a \in M : f(a) = b \}$$

$$f^{-1}(N) = \{ a \in A;\ f(a) \in N \}$$

Rozhodněte, zda platí následující rovnosti; pokud některá neplatí, pokuste se charakterizovat zobrazení, pro která rovnost platí.

a) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$; $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$;

b) $f(M_1 \cap M_2) = f(M_1) \cap f(M_2)$; $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$;

c) $f(M_1 \setminus M_2) = f(M_1) \setminus f(M_2)$; $f^{-1}(N_1 \setminus N_2) = f^{-1}(N_1) \setminus f^{-1}(N_2)$;

d) $\forall M \subseteq A : f^{-1}(f(M)) = M$; $\forall N \subseteq B : f(f^{-1}(N)) = N$.

5. Absolutní hodnota reálného (komplexního) čísla – – souvislost s definováním vzdálenosti v $\mathbb{R}$ (resp. v $\mathbb{C}$)

a) příklady ze cvičení 1 (II/1,2)

b) jak je definována vzdálenost v $\mathbb{C}$?

6. Matematická indukce

příklady ze cvičení 1 a jiné:

a) Je-li $q \neq 1$, $n \in N$, pak $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

b) Polynom stupně $n \geq 1$ $(n \in N)$ má v množině komplexních čísel právě n kořenů
(návod: použijte „základní větu algebry“: Polynom stupně $n \geq 1$ má v $\mathbb{C}$ aspoň jeden kořen.)

7. Spočetné množiny

Zopakujte si definici spočetné množiny.
Ukažte, že platí:

a) Množina všech uspořádaných dvojic přirozených čísel je spočetná.

b) $\mathbb{Q}$ je spočetná množina.

c) Množina všech uspořádaných n-tic $(n \in N, n \geq 2)$ racionálních čísel je spočetná.

d) Množina všech polynomů s racionálními koeficienty je spočetná.